

Analiză Matematică clasele 11–12

OlimpicEdu

Stefan Matei, CNITV

2025

1 Limite de şiruri

Definiție (majorant). Se numește majorant al unei mulțimi orice număr mai mare sau egal cu toate elementele mulțimii.

Se numește minorant al unei mulțimi orice număr mai mic sau egal cu toate elementele mulțimii.

Definiție (supremum). Se numește supremum al unei mulțimi cel mai mic majorant, dacă există.

Definiția poate fi tradusă astfel:

$$M = \sup A \iff \begin{cases} M \geq a, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, M - \varepsilon < a \leq M \end{cases}$$

Se numește infimum al unei mulțimi cel mai mare minorant, dacă există. De asemenea, un număr m este infimum al unei mulțimii A dacă $-m$ este supremum al mulțimii $-A$.

Axiomă (Cantor). *Orice mulțime mărginită superior are supremum.*

Pentru o mulțime A mărginită inferior $\exists \inf A = -\sup(-A)$, întrucât $-A$ este mărginită superior.

Definiție. Şir de numere reale se numește orice funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ și se notează cu $f_n = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definiție. Şir crescător se numește orice şir f_n cu $f_i \leq f_j$, $\forall i, j \in \mathbb{N}, i < j$.

Şir strict crescător se numește orice şir crescător cu elemente distincte două câte două. Un şir f_n este (strict) descrescător dacă $-f_n$ este (strict) crescător. Un şir este (strict) monoton dacă este (strict) crescător sau descrescător.

Definiție. Şir mărginit superior se numește orice şir f_n pentru care $\exists M \in \mathbb{R}$ astfel încât $f_n < M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Un şir f_n este mărginit inferior dacă $-f_n$ este mărginit superior. Un şir este mărginit dacă este mărginit superior și inferior.

Un şir f_n este nemărginit superior dacă nu este mărginit superior, adică $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ cu $f_{n_0} > M$. Un şir f_n este nemărginit inferior dacă $-f_n$ este nemărginit superior. Un şir este nemărginit dacă este nemărginit superior sau inferior.

Definiție (limita de șir). Un punct $l \in \mathbb{R}$ se numește limită de șir dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n - l| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$. Dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $f_n > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$, atunci limita șirului este ∞ . Dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $f_n < -\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$, atunci limita șirului este $-\infty$.

Se notează $f_n \rightarrow l$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = l$. Se observă că limita unui șir, dacă există, este unică (demonstrația este lăsată ca exercițiu cititorului).

Definiție. Un șir se numește convergent dacă are limită reală (finită). Un șir se numește divergent dacă nu e convergent (nu are limită sau are limită infinită).

Teoremă (Weierstrass). *Un șir monoton și mărginit este convergent. Un șir monoton și nemărginit are limită infinită (este divergent).*

Demonstrație. Fie x_n un șir monoton și mărginit. Presupunem întâi că este crescător. Fie mulțimea $A = \{x_n \mid \forall n \in \mathbb{N}\}$, mărginită superior (întrucât șirul este mărginit superior), deci din Cantor $\exists M = \sup A$, adică

$$\forall a \in A, a \leq M$$

și

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A, M - \varepsilon < a \leq M.$$

Dar $a \in A$, deci $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, x_{n_\varepsilon} = a$. Fiind șir crescător, atunci $x_n \geq x_{n_\varepsilon}, \forall n \geq n_\varepsilon$, așadar

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } M - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq M, \forall n \geq n_\varepsilon \iff x_n \rightarrow M \in \mathbb{R},$$

prin urmare este convergent. Dacă șirul este descrescător, atunci $-x_n$ este crescător și conform cazului anterior converge la M . Deci $x_n \rightarrow -M$, adică este convergent.

Dacă x_n este crescător și nemărginit superior, atunci $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, x_{n_\varepsilon} > \varepsilon$ și $x_n \geq x_{n_\varepsilon}, \forall n \geq n_\varepsilon$. Atunci $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, x_n \geq x_{n_\varepsilon} > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \iff x_n \rightarrow \infty$. Dacă este descrescător și nemărginit inferior, atunci $-x_n$ crescător și nemărginit superior $\implies -x_n \rightarrow \infty \implies x_n \rightarrow -\infty$. ■

Definiție (subșir). Un șir s_n se numește subșir al șirului f_n dacă $\exists k_n \in \mathbb{N}$ strict crescător astfel încât $s_n = f_{k_n}$.

Orice subșir al unui șir cu limită tinde la aceeași limită. Așadar, dacă un șir are două subșiruri cu limite distincte, atunci nu are limită.

Teoremă (Criteriul Cleștelui). *Fie x_n un șir de numere reale astfel încât $a_n \leq x_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$, unde $a_n \rightarrow l, b_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Atunci $x_n \rightarrow l$.*

Demonstrație.

$$\begin{aligned}
& 0 \leq x_n - a_n \leq b_n - a_n \rightarrow l - l = 0 \\
\implies & \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } 0 \leq x_n - a_n \leq b_n - a_n \leq \varepsilon, \forall n \geq \max(n_\varepsilon, n_0) = N_\varepsilon \\
& \iff x_n - a_n \rightarrow 0 \\
\implies & x_n = (x_n - a_n) + a_n \rightarrow 0 + l = l \implies x_n \rightarrow l
\end{aligned}$$

■

Dacă $a_n \rightarrow \infty$, atunci la fel și $x_n \rightarrow \infty$. Dacă $b_n \rightarrow -\infty$, atunci la fel și $x_n \rightarrow -\infty$.

Observație. Șirul $x_n = a^n, |a| < 1$ este convergent la 0.

Demonstrație.

$$\begin{aligned}
\left| \left(\frac{1}{a} \right)^n \right| &= \left(1 + \frac{1}{|a|} - 1 \right)^n \geq 1 + n \left(\frac{1}{|a|} - 1 \right) \rightarrow \infty \text{ (ineg. lui Bernoulli)} \\
|x_n - 0| &= |a|^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|} \right)^n} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0 \implies x_n \rightarrow 0
\end{aligned}$$

■

Teoremă (Criteriul Raportului). Fie x_n un șir de numere reale astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1.$$

Atunci $x_n \rightarrow 0$.

Demonstrație. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \implies 0 < |x_{n+1}| < (l + \varepsilon) \cdot |x_n|, \forall n \geq n_\varepsilon$. Fixăm $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1-l}{2} > 0 \implies l + \varepsilon = \frac{1+l}{2} < 1$. Prin urmare $\exists n_0 \in \mathbb{N}, 0 < |x_{n+1}| < \frac{l+1}{2} \cdot |x_n|, \forall n \geq n_0 \implies 0 < |x_n| < \left(\frac{l+1}{2} \right)^{n-n_0} \cdot |x_{n_0}|, \forall n \geq n_0$ (inducție). Din Criteriul Cleștelui, șirul $|x_n| \rightarrow 0 \implies x_n \rightarrow 0$. ■

Lemă (Cesàro). Orice șir mărginit are cel puțin un subșir convergent.

Demonstrație. Fie șirul mărginit x_n ($\exists a_0, b_0, a_0 < x_n < b_0, \forall n \in \mathbb{N}$) și șirurile a_n, b_n , unde $a_n = a_{n-1}, b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ dacă intervalul (a_n, b_n) conține o infinitate de elemente ale șirului x_n , iar dacă nu, $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = b_{n-1}$. Astfel, există un subșir s_n al șirului x_n astfel încât $a_n < s_n < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Se observă că a_n este crescător, iar b_n este descrescător, ambele mărginite. Deci, din Weierstrass, cele două șiruri sunt convergente, la aceeași limită $l \in [a_0, b_0]$, întrucât $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \rightarrow 0$. Atunci, din Criteriul Cleștelui, $s_n \rightarrow l$. Așadar, există un subșir convergent twin! ■

Teoremă (Stolz $\frac{*}{\infty}$). Fie şirurile $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, unde y_n este şir nemărginit superior, strict crescător şi pozitiv, iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Demonstraţie. Dacă $l \in \mathbb{R}$, atunci $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < l + \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_\varepsilon$.
 $\implies (l - \frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (l + \frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1} - y_n)$. Adunând relaţiile pentru $n-1, n-2, \dots, n_\varepsilon$ se obţine: $(l - \frac{\varepsilon}{2})(y_n - y_{n_\varepsilon}) < x_n - x_{n_\varepsilon} < (l + \frac{\varepsilon}{2})(y_n - y_{n_\varepsilon}) \implies (l - \frac{\varepsilon}{2})(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_n}) + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < (l + \frac{\varepsilon}{2})(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_n}) + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (l - \frac{\varepsilon}{2})(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_n}) + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_n} = l - \frac{\varepsilon}{2} \implies (l - \frac{\varepsilon}{2})(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_n}) + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_n} > (l - \frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{2} = l - \varepsilon, \forall n \geq n'_\varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (l + \frac{\varepsilon}{2})(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_n}) + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_n} = l + \frac{\varepsilon}{2} \implies (l + \frac{\varepsilon}{2})(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_n}) + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_n} < (l + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} = l + \varepsilon, \forall n \geq n''_\varepsilon$$

$$\implies l - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < l + \varepsilon, \forall n \geq \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) = N_\varepsilon \iff \frac{x_n}{y_n} \rightarrow l.$$

Dacă $l = +\infty$, atunci $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > 2\varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \implies x_{n+1} - x_n > 2\varepsilon(y_{n+1} - y_n)$.
 Adunând relaţiile pentru $n-1, n-2, \dots, n_\varepsilon$ se obţine: $x_n - x_{n_\varepsilon} > 2\varepsilon(y_n - y_{n_\varepsilon}) \implies \frac{x_n}{y_n} > 2\varepsilon(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_n}) + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_n} \rightarrow 2\varepsilon \implies 2\varepsilon(1 - \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_n}) + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_n} > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon, \forall n \geq n'_\varepsilon \implies \frac{x_n}{y_n} > \varepsilon, \forall n \geq \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon) \iff \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$. Dacă $l = -\infty$, atunci aplicăm cazul anterior pentru şirurile $-x_n, y_n \implies \frac{-x_n}{y_n} \rightarrow +\infty \implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow -\infty$. ■

Teoremă (Stolz $\frac{0}{0}$). Fie şirurile $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, unde y_n este strict descrescător, iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Demonstraţie. Dacă $l \in \mathbb{R}$, atunci $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, l - \varepsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < l + \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \implies (l - \varepsilon)(y_n - y_{n+1}) < x_n - x_{n+1} < (l + \varepsilon)(y_n - y_{n+1})$. Adunând relaţiile pentru $n, n+1, \dots, m$ se obţine: $(l - \varepsilon)(y_n - y_m) < x_n - x_m < (l + \varepsilon)(y_n - y_m)$. Trecem pe m la infinit: $(l - \varepsilon)y_n < x_n < (l + \varepsilon)y_n \implies l - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < l + \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \iff \frac{x_n}{y_n} \rightarrow l$. Dacă $l = +\infty$, atunci $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \implies x_{n+1} - x_n < \varepsilon(y_{n+1} - y_n)$. Adunând relaţiile

pentru $n, n+1, \dots, m$ se obține: $x_m - x_n < \varepsilon(y_m - y_n)$. Trecem pe m la infinit: $-x_n < -\varepsilon \cdot y_n \implies \frac{x_n}{y_n} > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon \iff \frac{x_n}{y_n} \rightarrow +\infty$. Dacă $l = -\infty$, atunci aplicăm cazul anterior pentru șirurile $-x_n, y_n \implies \frac{-x_n}{y_n} \rightarrow +\infty \implies \frac{x_n}{y_n} \rightarrow -\infty$. ■

Lemă (Cesàro II). *Dacă un șir mărginit nu converge la o limită $l \in \mathbb{R}$, atunci există cel puțin un subșir convergent al acestuia care nu tinde la l .*

Demonstrație. Fie șirul x_n care nu converge la $l \implies \exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N} \exists n_0 \geq n$ cu $|x_{n_0} - l| > \varepsilon_0$.

$\implies \exists k_0 \geq 0$ astfel încât $|x_{k_0} - l| > \varepsilon_0, \exists k_n \geq k_{n-1} + 1$ astfel încât $|x_{k_n} - l| > \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\implies k_n$ este strict crescător, iar x_{k_n} este subșir al șirului x_n , cu proprietatea $|x_{k_n} - l| > \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$

x_{k_n} șir mărginit $\xrightarrow{\text{Cesàro}} \exists s_n$ subșir convergent al șirului $x_{k_n} \implies s_n \rightarrow l' \in \mathbb{R}$

Dar $|s_n - l| > \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N} \implies |l' - l| \geq \varepsilon_0 > 0 \implies l \neq l'$ ■

Teoremă (*). *Fie funcția $f : I \rightarrow J$ (I, J intervale $\subseteq \mathbb{R}$), surjectivă și monotonă, și un șir $x_n \in I, x_n \rightarrow l \in I$. Atunci $f(x_n) \rightarrow f(l)$.*

Demonstrație. Luăm f crescătoare. Presupunem prin absurd că $f(x_n)$ nu converge la $f(l) \xrightarrow{\text{lema}} \exists s_n$ un șir strict crescător cu $f(x_{s_n}) \rightarrow \lambda \neq f(l)$.

x_n convergent, deci mărginit $\implies \exists m, M \in I, m \leq x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \implies f(m) \leq f(x_{s_n}) \leq f(M)$

$\implies f(m) \leq \lambda \leq f(M) \implies \lambda \in J \xrightarrow{\text{surjectivitate}} \exists s \in I$ cu $f(s) = \lambda \implies f(x_{s_n}) \rightarrow f(s)$

Abordăm cazul în care $f(s) < f(l) \xrightarrow{\text{surjectivitate}} \exists a \in I, f(s) < f(a) < f(l)$

$\xrightarrow{\text{cresc}} s < a < l$. Dar $x_{s_n} \rightarrow l \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}$ cu $a < x_{s_n}, \forall n \geq n_0 \implies f(a) \leq f(x_{s_n})$

$\implies f(a) \leq f(s) \implies a \leq s$ (Fals)

Analog cazul când $f(s) > f(l) \implies \lambda = f(s) = f(l)$ (Contradicție) $\implies f(x_n) \rightarrow f(l)$. Pentru f descrescătoare aplicăm raționamentul anterior cu $-f \implies -f(x_n) \rightarrow -f(l) \implies f(x_n) \rightarrow f(l)$ ■

Fie şirul $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Observație. Şirul e_n este strict monoton și mărginit, deci convergent.

Demonstrație.

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot n}{n+1} \text{ (ineg. mediilor)}$$

$$\implies e_n < e_{n+1} \implies \text{şirul este strict monoton (1)}$$

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} = \\ &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \stackrel{\text{not}}{=} E_n \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k} = 3 - \frac{1}{n} < 3$$

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2 \text{ (ineg. lui Bernoulli)}$$

$$\implies 2 \leq e_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \implies \text{şirul este mărginit (2)}$$

$$\stackrel{1,2}{\implies} e_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \text{ (Weierstrass)}$$

■

Definiție.

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Teoremă (Neper).

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Demonstrație. Șirul e_n este strict crescător și $e_n \rightarrow e \implies e_n < e$.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \iff \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \ln e \iff \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

Fie $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

$$\sqrt[n+2]{1 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} < \frac{1 + \frac{n}{n+1} \cdot (n+1)}{n+2} \text{ (ineg. mediilor)}$$

$$\implies \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \implies f_n > f_{n+1}$$

Deci f_n este strict descrescător și $f_n \rightarrow e \implies f_n > e$.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e \iff \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \ln e \iff \ln(n+1) - \ln(n) > \frac{1}{n+1}$$

■

Observație. Șirul $E_n \rightarrow e$.

Demonstrație. Cunoaștem că:

$$e_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Din Inegalitatea lui Bernoulli (generalizată):

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) > 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}$$

$$\implies e_n > E_n - \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{k!} = E_n - \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} = E_n - \frac{E_{n-2}}{2n}$$

$$\implies 0 > e_n - E_n > -\frac{E_{n-2}}{2n} \rightarrow 0 \text{ (} E_n \text{ este sir marginit) } \implies E_n = (E_n - e_n) + e_n \rightarrow 0 + e = e$$

■

Observație. Numărul e este irațional.

Demonstrație.

$$\begin{aligned} E_{n+m} - E_n &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{(n+k)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=2}^m \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+k)} \right) < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^m \frac{1}{(n+2)^{k-1}} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(n+2)^m}}{1 - \frac{1}{n+2}} < \frac{n+2}{n! \cdot (n+1)^2} < \frac{1}{n \cdot n!}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Trecem pe m la infinit:

$$0 < e - E_n < \frac{1}{n \cdot n!} \implies 0 < n \cdot n! \cdot e - n \cdot n! \cdot E_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Dacă presupunem prin absurd că $e \in \mathbb{Q}$, $\implies e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Q}^*$, $(p, q) = 1$, atunci:

$$\begin{aligned} 0 < q! \cdot p - q \cdot q! \cdot E_q < 1 \text{ (Contradicție, întrucât nu există numere naturale în } (0,1)) \\ \implies e \notin \mathbb{Q} \end{aligned}$$

■

Teoremă (Criteriul lui e). *Fie șirurile $x_n \rightarrow \pm\infty$, $y_n \rightarrow 0$. Atunci:*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{x_n} &= e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} &= e \end{aligned}$$

Demonstrație. Din $[x_n] \leq x_n < [x_n] + 1$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1} \right)^{[x_n]} &< \left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{[x_n]} \right)^{[x_n] + 1} \\ \implies \left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1} \right)^{[x_n] + 1} &\cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{[x_n] + 1}} < \left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{[x_n]} \right)^{[x_n]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x_n]} \right) \end{aligned}$$

Presupunem că $x_n \rightarrow \infty$. Atunci $[x_n] \rightarrow \infty$, $[x_n] + 1 \rightarrow \infty$. Șirurile $\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1} \right)^{[x_n] + 1}$ și $\left(1 + \frac{1}{[x_n]} \right)^{[x_n]}$ sunt formate din subșiruri ale șirului $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, deci au aceeași limită, adică e . Așadar, din Criteriul Cleștelui rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{x_n} = e$. Dacă $x_n \rightarrow -\infty$, atunci aplicăm cazul anterior pentru șirul $-x_n - 1$:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-x_n - 1} \right)^{-x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{x_n + 1} \right)^{-x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n + 1}{x_n} \right)^{x_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{x_n}$$

Pentru y_n , aplicăm primul caz pentru subșirul pozitiv al șirului $\frac{1}{y_n}$ (dacă există) și al doilea caz pentru subșirul negativ al acestuia (dacă există). Avem apoi:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{\frac{1}{y_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}}$$

■

Observație. Fie $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\sin x_n \rightarrow \sin l, \quad \cos x_n \rightarrow \cos l$$

Demonstrație.

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \sin x_n < x_n < \operatorname{tg} x_n, \quad \forall n \geq n_0$$

$$|\sin x_n - \sin l| = \left| 2 \sin \left(\frac{x_n - l}{2} \right) \cos \left(\frac{x_n + l}{2} \right) \right| < 2 \cdot \frac{x_n - l}{2} \cdot 1 \rightarrow 0$$

$$\implies \sin x_n \rightarrow \sin l$$

$$\cos x_n = \sin \left(x_n + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \sin \left(l + \frac{\pi}{2} \right) = \cos l$$

■

Observație. Avem următoarele limite remarcabile ($x_n \rightarrow 0$):

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + x_n)^r - 1}{x_n} = r$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}(x_n)}{x_n} = 1$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(x_n)}{x_n} = 1$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(x_n)}{x_n} = 1$$

Demonstrație.

$$\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \right) = \ln e = 1$$

$$\text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{\ln(1 + (a^{x_n} - 1))} \cdot \frac{\ln(1 + (a^{x_n} - 1))}{x_n} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a^{x_n})}{x_n} = \ln a$$

$$\text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+x_n)^r - 1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+x_n)^r - 1}{\ln(1 + ((1+x_n)^r - 1))} \cdot \frac{\ln(1 + ((1+x_n)^r - 1))}{x_n} = r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = r$$

$$\text{d)} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \sin x_n < x_n < \operatorname{tg} x_n, \forall n \geq n_0 \implies 1 < \frac{x_n}{\sin x_n} < \frac{1}{\cos x_n} \rightarrow 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$$

$$\text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}(x_n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos x_n} \cdot \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1$$

$$\text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(x_n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(x_n)}{\sin(\arcsin(x_n))} = 1$$

$$\text{g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(x_n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(x_n)}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x_n)} = 1$$

■

Problema 1.1. Demonstrați că șirul

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

ține la infinit.

Problema 1.2. Demonstrați că șirul

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

este convergent.

Problema 1.3. Demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

2 Limite de funcții

Definiție (vecinătate). O mulțime V se numește vecinătate a punctului $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă $\exists \varepsilon > 0$ cu $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$. O mulțime V se numește vecinătate a lui ∞ dacă $\exists \varepsilon > 0$ cu $(\varepsilon, \infty) \subset V$. O mulțime V se numește vecinătate a lui $-\infty$ dacă $\exists \varepsilon > 0$ cu $(-\infty, -\varepsilon) \subset V$.

Se notează cu $\mathcal{V}(x_0)$ mulțimea vecinătăților unui punct x_0 .

Definiție. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Definiție (punct de acumulare). Un punct $a \in D$ se numește punct de acumulare a mulțimii D dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), (V \setminus \{a\}) \cap D \neq \emptyset$$

Se notează cu D' mulțimea punctelor de acumulare a mulțimii D .

Observație.

$$a \in D' \iff \exists x_n \in D \setminus \{a\} \text{ cu } x_n \rightarrow a$$

Definiție (limita de funcție). Un punct $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește limita unei funcții $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, în punctul $x_0 \in D'$ dacă oricare vecinătate V a lui l , există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(x) \in V$, $\forall x \in U \cap D, x \neq x_0$.

$$l \stackrel{\text{not}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

O exprimare echivalentă cu $\varepsilon - \delta$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \text{ cu } |x - x_0| < \delta \text{ avem } |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x \text{ cu } |x - x_0| < \delta \text{ avem } f(x) > \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ astfel încât } \forall x > \delta \text{ avem } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Restul cazurilor (6) sunt lăsate ca exercițiu cititorului.

Teoremă (Criteriul lui Heine). Fie $x_0 \in D'$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\exists l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \forall x_n \in D \setminus \{x_0\} \text{ cu } x_n \rightarrow x_0, f(x_n) \rightarrow l$$

Demonstrație. " $\implies$ "

$$\exists l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff \forall V \in \mathcal{V}(l) \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \text{ cu } f(U \cap D \setminus \{x_0\}) \subset V$$

$$x_n \rightarrow x_0 \implies \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon \text{ cu } x_n \in U \implies f(x_n) \in V$$

$$\implies \forall V \in \mathcal{V}(l) \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } f(x_n) \in V, \forall n \geq n_\varepsilon \iff f(x_n) \rightarrow l$$

" $\impliedby$ " Presupunem prin absurd că limita lui f în x_0 NU este l .

$$\implies \exists V_0 \in \mathcal{V}(l) \forall U \in \mathcal{V}(x_0) \exists x \in U \cap D \setminus \{x_0\} \text{ astfel încât } f(x) \notin V_0$$

$$\implies \exists x_n \in U \cap D \setminus \{x_0\}, x_n \rightarrow l, \text{ astfel încât } f(x_n) \notin V_0 \implies f(x_n) \nrightarrow l \text{ (Contradicție)}$$

■

Observație. Dacă $\exists x_n, y_n \in D \setminus \{a\}$, $x_n, y_n \rightarrow a \in D'$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

$$\text{Atunci } \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Observație. Conform criteriului lui Heine, toate limitele remarcabile de la șiruri sunt valabile și pentru funcții:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$

De asemenea, valabile sunt și criteriile de convergență (lăsate ca exercițiu cititorului).

Definiție (limita laterală). Un punct $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește limita laterală la stânga a unei funcții $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, în punctul $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ dacă oricare vecinătate V a lui l , există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(x) \in V$, $\forall x \in U \cap D, x < x_0$.

$$l \stackrel{\text{not}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) \text{ sau } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \text{ sau } f(x_0 - 0)$$

Un punct $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește limita laterală la dreapta a unei funcții $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, în punctul $x_0 \in (D \cap (x_0, \infty))'$ dacă oricare vecinătate V a lui l , există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(x) \in V$, $\forall x \in U \cap D, x > x_0$.

$$l \stackrel{\text{not}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \text{ sau } \lim_{x \searrow x_0} f(x) \text{ sau } f(x_0 + 0)$$

Observație.

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Teoremă (*). O funcție monotonă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ interval) are limite laterale la stânga și dreapta în orice punct interior și câte o limită laterală în fiecare dintre capete.

Demonstrație. Presupunem că f crescătoare. Fie x_0 punct interior lui I și $A = \{f(x) \mid x < x_0\} \implies a \leq f(x_0)$, $\forall a \in A \implies A$ mărginită superior.

$$\stackrel{\text{Cantor}}{\implies} \exists M = \sup A \iff M \text{ majorant și } \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon < x_0 \text{ cu } M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq M$$

$$f \text{ cresc.} \implies f(x) \geq f(x_\varepsilon), \forall x > x_\varepsilon \implies \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon < x_0 \text{ astfel încât } \forall x \in (x_\varepsilon, x_0), M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

$$\iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = M$$

Asemanător se demonstrează și existența limitei laterale la dreapta, egală cu $\inf\{f(x) \mid x > x_0\}$. Dacă f descrescătoare, atunci aplicăm cazul anterior pentru $-f \implies -f$ are limite laterale $\implies f$ are limite laterale în x_0 .

În capătul din stânga există limita laterală la dreapta egală cu $\inf\{f(x) \mid x \in I\}$. În capătul din dreapta există limita laterală la stânga egală cu $\sup\{f(x) \mid x \in I\}$. ■

3 Continuitate

Definiție (continuitatea într-un punct). O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, se numește continuă într-un punct $x_0 \in D$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x) \in V, \forall x \in U \cap D$.

O funcție este continuă pe o mulțime $\subseteq \mathbb{R}$ dacă e continuă în fiecare punct al ei.

Observație. O funcție este continuă în toate punctele izolate ale domeniului.

O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, este continuă în $x_0 \in D \cap D'$ dacă și numai dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \stackrel{\text{Heine}}{\iff} \forall a_n \in D, a_n \rightarrow x_0, f(a_n) \rightarrow f(x_0)$$

Observație. Dacă $\exists a_n, b_n \rightarrow x_0 \in D$, iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

$\implies f$ nu este continuă în x_0 .

Dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x), f(x_0), \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

există și nu sunt toate egale, atunci f nu este continuă în x_0 .

Definiție. Orice punct (al domeniului) în care o funcție nu este continuă se numește punct de discontinuitate. Dacă limitele laterale sunt ambele finite, se numește punct de discontinuitate de speța I, iar dacă nu, punct de discontinuitate de speța II (o limita laterală fie nu există, fie este infinită).

Teoremă (Weierstrass). O funcție continuă definită pe un interval închis este mărginită și își atinge marginile.

Demonstrație. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Presupunem prin absurd că este nemărginită.

$\implies \exists u_n \in [a, b]$ cu $f(u_n) \rightarrow \pm\infty$, dar șirul este mărginit $\stackrel{\text{Cesaro}}{\implies} \exists k_n$ strict cresc, $u_{k_n} \rightarrow l \in [a, b]$

$$\implies f(u_{k_n}) \rightarrow f(l) \neq \pm\infty \text{ (Contradicție)}$$

Presupunerea este falsă, deci funcția este mărginită $\xRightarrow{\text{Cantor}} \exists M = \sup(Im_f), m = -\sup(-Im_f) = \inf(Im_f)$.

$$\implies \exists x_n \in [a, b], f(x_n) \rightarrow M \text{ dar șirul este mărginit } \xRightarrow{\text{Cesaro}} \exists s_n \text{ strict cresc, } x_{s_n} \rightarrow l' \in [a, b]$$

$$\implies f(x_{s_n}) \rightarrow f(l'), f(x_{s_n}) \rightarrow M \implies M = f(l') \in Im_f$$

Analog $m \in Im_f \implies$ concluzia. ■

Teoremă (*). Fie o funcție continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci $\exists c \in (a, b), f(c) = 0$.

Demonstrație. Luăm cazul în care $f(a) < 0 < f(b)$.

$$\text{Fie mulțimea } A = \{x \in [a, b] \mid f(x) > 0\} \implies A \subset (a, b] \xRightarrow{\text{Cantor}} \exists c = -\sup(-A) = \inf A \geq a.$$

$$c = \inf A \implies \exists x_n \in A, x_n \rightarrow c \implies f(x_n) \rightarrow f(c), \text{ dar } f(x_n) > 0 \implies f(c) \geq 0 > f(a) \implies c > a$$

$$\text{Fie } a_n = c - \frac{c-a}{n} < c \implies a_n \notin A \implies f(a_n) < 0$$

$$a_n \rightarrow c \implies f(a_n) \rightarrow f(c) \implies f(c) \leq 0 \implies 0 \leq f(c) \leq 0 \implies f(c) = 0, c \in (a, b)$$

Pentru cazul $f(a) > 0 > f(b)$, aplicăm cazul anterior pentru $-f \implies \exists c \in (a, b), -f(c) = 0 \implies f(c) = 0$. ■

Definiție (proprietatea Darboux). O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, are proprietatea Darboux pe un interval $I \subseteq D$ dacă $\forall a, b \in I, a < b$ și $\forall \lambda$ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$, $\exists c \in (a, b), f(c) = \lambda$.

Observație. O funcție continuă pe un interval are prop. Darboux pe acel interval.

Demonstrație. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, continuă pe intervalul $I \subseteq D$ și $a, b \in I, a < b$, alese oarecare.

$$\text{Fie } g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - \lambda \implies g(a) \cdot g(b) < 0$$

$$\xRightarrow{\text{Teorema}} \exists c \in (a, b), g(c) = 0 \implies f(c) = \lambda$$

■

Observație. Dacă f are prop. Darboux pe un interval, atunci are și pe orice subinterval al acestuia.

Observație. Nu toate funcțiile cu prop. Darboux sunt continue.

Demonstrație. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, nu este continuă în 0, dar are P.D. pe $\mathbb{R}$:

$$\text{Fie } x_n = (-1)^n \frac{1}{\arcsin \lambda + \pi n} \rightarrow 0, \quad f(x_n) = (-1)^n \sin(\arcsin \lambda + \pi n) = (-1)^{2n} \lambda = \lambda$$

$$\forall a \leq 0 \leq b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b, \quad \forall \lambda \in (f(a), f(b)), \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad x_{n_0} \in (a, b), \quad f(x_{n_0}) = \lambda$$

■

Observație.

f are prop. Darboux pe intervalul $I \implies f(I)$ este interval.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că $f(I)$ nu este interval $\implies \exists a, b \in I, \lambda \in \mathbb{R}$ cu $f(a) < \lambda < f(b), \lambda \notin f(I)$

$$\xRightarrow{\text{P.D.}} \exists c \in (a, b), \quad f(c) = \lambda \in f(I) \quad (\text{Contradicție})$$

■

Observație. Dacă Im_f nu este interval, atunci f nu are prop. Darboux.

Teoremă (*). O funcție cu prop. Darboux pe un interval nu are puncte de discontinuitate de speța I pe acel interval.

Demonstrație. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval $\subseteq \mathbb{R}$. Presupunem prin absurd că $\exists a \in I, f(a-0) \neq f(a+0)$. Notăm $m = f(a-0)$, $M = f(a+0)$ și presupunem $m < M$.

$$\exists U_1 \in \mathcal{V}(a), f(x) \in \left(m - \frac{M-m}{3}, m + \frac{M-m}{3}\right), \quad \forall x \in U_1 \cap (-\infty, a) \cap I$$

$$\exists U_2 \in \mathcal{V}(a), f(x) \in \left(M - \frac{M-m}{3}, M + \frac{M-m}{3}\right), \quad \forall x \in U_2 \cap (a, \infty) \cap I$$

$$J = (U_1 \cap (-\infty, a) \cap I) \cup (U_2 \cap (a, \infty) \cap I) \text{ este interval}$$

$$f(J) \cap \left(m - \frac{M-m}{3}, m + \frac{M-m}{3}\right) \neq \emptyset \text{ și } f(J) \cap \left(M - \frac{M-m}{3}, M + \frac{M-m}{3}\right) \neq \emptyset$$

$$\text{Dar } f(J) \not\subseteq \left[m + \frac{M-m}{3}, M - \frac{M-m}{3}\right] \implies f(J) \text{ nu este interval. (Contradicție)}$$

Dacă $m > M$ se aplică primul caz pentru $-f \implies -f(J)$ nu este interval, deci nici $f(J) \implies$ Contradicție. ■

Teoremă (*). O funcție injectivă cu prop. Darboux este strict monotonă.

Demonstrație. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval $\subseteq \mathbb{R}$, injectivă cu P.D. Presupunem prin absurd că f nu este monotonă $\implies \exists x_0 < x_1 < x_2 \in I$, $f(x_0) < f(x_1) > f(x_2)$ sau $f(x_0) > f(x_1) < f(x_2)$.

Luăm întâi cazul când $f(x_0) < f(x_1) > f(x_2)$.

$$\exists \lambda \in (\max\{f(x_0), f(x_2)\}, f(x_1)) \implies f(x_0) < \lambda < f(x_1) > \lambda > f(x_2)$$

$$\xrightarrow{\text{P.D.}} \exists c_1 \in (x_0, x_1), c_2 \in (x_1, x_2), f(c_1) = f(c_2) = \lambda \text{ (Contradicție - funcția este injectivă)}$$

Pentru al doilea caz, aplicăm primul caz funcției $-f \implies$ Contradicție $\implies$ concluzia. ■

Teoremă (*). O funcție monotonă cu prop. Darboux este continuă.

Demonstrație. Funcția este monotonă, deci are limite laterale în fiecare punct. Dar are P.D., așadar nu are puncte de discontinuitate de speța I. Prin urmare limitele laterale sunt egale cu valoarea funcției în acel punct, adică funcția este continuă. ■

Observație. O funcție injectivă cu prop. Darboux este continuă.

Teoremă (*). O funcție surjectivă și monotonă definită pe un interval cu valori într-un interval este continuă.

Demonstrație. Funcția este monotonă, deci are limite laterale în fiecare punct. Dacă acestea ar fi distincte, funcția n-ar fi surjectivă. Prin urmare limitele laterale sunt egale cu valoarea funcției în acel punct, adică funcția este continuă. ■

Observație. Fie o funcție $f : I \rightarrow J$, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale, continuă și inversabilă. Atunci funcția inversă $f^{-1} : J \rightarrow I$ este de asemenea continuă.

Demonstrație. Funcția f este inversabilă $\iff$ bijectivă și are P.D. $\implies$ strict monotonă. Presupunem că este strict crescătoare.

$$\implies \forall x, y \in I, x < y \iff f(x) < f(y) \implies f(f^{-1}(x)) = x < y = f(f^{-1}(y)) \iff f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$$

$\implies$ Inversa este strict crescătoare. Din faptul că este surjectivă și monotonă, definită pe un interval cu valori într-un interval rezultă că este continuă. Dacă f este strict descrescătoare, se aplică cazul anterior pentru $-f \implies -f^{-1}$ continuă, de unde rezultă concluzia. ■

Lemă (*). Fie o funcție convexă pe un interval. Atunci funcția este mărginită pe acel interval.

Demonstrație. Fie $f : [a, b] \in \mathbb{R}$, convexă pe $[a, b]$.

$$\implies f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \leq \max\{f(a), f(b)\}, \forall t \in [0, 1]$$

$$\implies f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}, \forall x \in [a, b] \implies \text{mărginită superior.}$$

Presupunem prin absurd că este nemărginită inferior $\implies \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b], f(x) < M$.
Pentru $M_0 = \min\{f(a), f(b)\}$, $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) < M_0$.

$$\text{Fie } y_1 = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(a - b) + f(b) \text{ și } y_2 = \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}(b - a) + f(a)$$

Pentru $M_1 = \min\{y_1, y_2\}$, $\exists x_1 \in [a, b], f(x_1) < M_1$. Dacă $x_1 \in (a, x_0) \implies x_0 \in (x_1, b)$:

$$\implies f(tx_1 + (1-t)b) \leq tf(x_1) + (1-t)f(b)$$

Luăm $t = \frac{x_0 - b}{x_1 - b}$:

$$\implies f(x_0) \leq \frac{x_0 - b}{x_1 - b}(f(x_1) - f(b)) + f(b)$$

Dar $f(x_1) < y_1 \implies f(x_1) - f(b) < \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(a - b)$

$$\implies f(x_0) < f(b) + \frac{x_0 - b}{x_1 - b} \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(a - b) = f(b) - \frac{a - b}{x_1 - b}(f(b) - f(x_0))$$

Dar $x_1 > a \implies x_1 - b > a - b \implies \frac{1}{x_1 - b} < \frac{1}{a - b} \implies -\frac{a - b}{x_1 - b} < -\frac{a - b}{a - b} = -1$

$$\implies f(x_0) < f(b) - f(b) + f(x_0) \implies f(x_0) < f(x_0) \text{ (Contradicție)}$$

Dacă $x_1 \in (x_0, b)$ se obține în mod analog o contradicție $\implies$ funcția este mărginită inferior. ■

Teoremă (*). Fie o funcție convexă pe un interval. Atunci funcția este continuă în orice punct interior al intervalului.

Demonstrație. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, convexă pe I , și $a < x < y < b$.

$$\implies f(ta + (1-t)y) \leq tf(a) + (1-t)f(y), \forall t \in [0, 1]$$

$$\implies f((1-t')x + t'b) \leq (1-t')f(x) + t'f(b), \forall t' \in [0, 1]$$

Luăm $t = \frac{x - y}{a - y}$, $t' = \frac{y - x}{b - x}$.

$$\implies f(x) \leq \frac{x - y}{a - y}(f(a) - f(y)) + f(y) \text{ și } f(y) \leq \frac{y - x}{b - x}(f(b) - f(x)) + f(x)$$

$$\implies \frac{x-y}{b-x}(f(b)-f(x)) \leq f(x)-f(y) \leq \frac{x-y}{a-y}(f(a)-f(y))$$

f mărginită $\implies f(b)-f(x), f(a)-f(y)$ mărginite

$$\stackrel{\text{Cleste}}{\implies} \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} f(x) = f(y) \text{ și } \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} f(y) = f(x), \forall x, y \text{ puncte interioare}$$

$$\implies \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x), \forall x_0 \text{ punct interior}$$

Deci f continuă în orice punct interior. ■

4 Derivabilitate

Definiție (derivata unei funcții într-un punct). Se numește derivata funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, într-un punct $x_0 \in D \cap D'$ următoarea limită, dacă există:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{not}}{=} f'(x_0)$$

Definiție (derivabilitate într-un punct). O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, se numește derivabilă într-un punct $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$.

Dacă $\exists f'(x_0) \in \{-\infty, \infty\}$, atunci se spune că funcția are derivată în x_0 .

Observație. O funcție este derivabilă pe o mulțime $\subseteq \mathbb{R}$ dacă este derivabilă în fiecare punct al ei.

Observație (legătura dintre continuitate și derivabilitate). Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct, dar invers nu.

Demonstrație.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ este continuă în 0, dar nu derivabilă. ■

Observație. Dacă o funcție are derivată într-un punct, nu este neapărat continuă în acel punct.

Demonstrație. Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$, are derivata ∞ în 0, dar este discontinuă.

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = 0 \neq -1 = f(0)$$
 ■

Definiție (derivata unei funcții). Dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe $E \subseteq D$, atunci funcția $f' : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

se numește derivata funcției f .

Observație. Sunt valabile următoarele reguli de derivare (atunci când expresiile sunt bine definite):

$$\mathbf{a)} \quad (f + g)' = f' + g'$$

$$\mathbf{b)} \quad (f \cdot g)' = fg' + f'g$$

$$\mathbf{c)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\mathbf{d)} \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Demonstrație.

a) trivial

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad (f \cdot g)'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)}{y - x} = \\ &= f(x) \cdot \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} + g(x) \cdot \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) = (fg' + f'g)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' + \frac{f'}{g}\right)(x) = f(x) \cdot \lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}}{y - x} + \frac{f'}{g}(x) = \\ &= f(x) \cdot \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(x) - g(y)}{(y - x)g(x)g(y)} + \frac{f'}{g}(x) = \left(-\frac{fg'}{g^2} + \frac{f'g}{g^2}\right)(x) = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(x) \end{aligned}$$

$$\mathbf{d)} \quad (f \circ g)'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(g(y)) - f(g(x))}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(g(y)) - f(g(x))}{g(y) - g(x)} \cdot \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = f'(g(x)) \cdot g'(x) = ((f' \circ g) \cdot g')(x)$$

■

Observație. Funcțiile elementare au următoarele derivate:

$$\mathbf{a)} \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\mathbf{b)} \quad (e^x)' = e^x$$

$$\mathbf{c)} \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$\mathbf{d)} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\mathbf{e)} \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$\mathbf{f)} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\mathbf{g)} \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Demonstrație.

$$\mathbf{a)} \quad (x^n)' = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{(y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1})}{y - x} = n \cdot x^{n-1}$$

$$\mathbf{b)} \quad (e^x)' = \lim_{y \rightarrow x} \frac{e^y - e^x}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{e^x(e^{y-x} - 1)}{y - x} = e^x \cdot \ln e = e^x$$

$$\mathbf{c)} \quad (\sqrt[n]{x})' = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y - x}{(y-x)(\sqrt[n]{y^{n-1}} + \sqrt[n]{y^{n-2}}\sqrt[n]{x} + \dots + \sqrt[n]{y}\sqrt[n]{x^{n-2}} + \sqrt[n]{x^{n-1}})} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\mathbf{d)} \quad (\ln x)' = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\ln y - \ln x}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\ln(1 + \frac{y-x}{x})}{\frac{y-x}{x} \cdot x} = \frac{1}{x}$$

$$\mathbf{e)} \quad (\sin x)' = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{2 \sin(\frac{y-x}{2}) \cos(\frac{y+x}{2})}{y - x} = \cos x \cdot \lim_{y \rightarrow x} \frac{\sin(\frac{y-x}{2})}{\frac{y-x}{2}} = \cos x$$

$$\mathbf{f)} \quad (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} + x\right)' = -\sin x$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g)} \quad (\arcsin x)' &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\arcsin y - \arcsin x}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\arcsin y - \arcsin x}{\sin(\arcsin y - \arcsin x)} \cdot \frac{\sin(\arcsin y - \arcsin x)}{y - x} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}}{y - x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1-x^2} + \lim_{y \rightarrow x} \frac{x(1-x^2-1+y^2)}{(y-x)(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2})} = \sqrt{1-x^2} + \lim_{y \rightarrow x} \frac{x(y-x)(y+x)}{(y-x)(2\sqrt{1-x^2})} = \\
&= \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

■

Observație. Fie I, J intervale $\subseteq \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow J$, inversabilă, $f^{-1} : J \rightarrow I$, $y \in J$, f derivabilă în $f^{-1}(y)$, $f' \circ f^{-1}(y) \neq 0$. Atunci f^{-1} derivabilă în y și:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Demonstrație.

$$f \circ f^{-1}(y) = y \implies f' \circ f^{-1}(y) \cdot (f^{-1})'(y) = 1 \implies (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

■

Definiție (punct de maxim local al unei funcții). Se numește punct de maxim local al unei funcții f un punct x_0 dacă $\exists V \in \mathcal{V}(x_0), f(x_0) \geq f(x), \forall x \in V$.

Un punct este minim local al unei funcții f dacă este maxim local al funcției $-f$.

Definiție (punct de extrem al unei funcții). Punct de extrem se numește orice punct de maxim sau minim local al unei funcții.

Teoremă (Fermat). Fie o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, și un punct de extrem $x_0 \in I$, diferit de capete, în care funcția este derivabilă. Atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstrație. Presupunem că x_0 este punct de maxim local $\implies \exists V \in \mathcal{V}(x_0), f(x_0) \geq f(x), \forall x \in V$.

$$\implies f(x) - f(x_0) \leq 0, \forall x < x_0, x \in V \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \implies f'(x_0) \geq 0$$

$$\implies f(x) - f(x_0) \leq 0, \forall x > x_0, x \in V \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \implies f'(x_0) \leq 0$$

Deci $f'(x_0) = 0$.

Dacă x_0 este punct de minim local, aplicăm primul caz pentru $-f \implies -f'(x_0) = 0 \implies f'(x_0) = 0$.

■

Teoremă (Rolle). Fie o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe (a, b) și continuă în capete. Dacă $f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b), f'(c) = 0$.

Demonstrație. Dacă funcția este constantă $\implies f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$. Presupunem că este neconstantă:

$\xRightarrow{\text{Weierstrass}} f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$ și fie $c \in \{\alpha, \beta\} \setminus \{a, b\} \implies c \in (a, b)$ și este punct de extrem.

$$\xRightarrow{\text{Fermat}} f'(c) = 0.$$

■

Observație (șirul lui Rolle). Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, derivabilă pe I și $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$. Fie $D = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$. Dacă $a, b \in D$, consecutive, $f(a)f(b) \leq 0$, atunci există exact o rădăcină a lui f în (a, b) .

Demonstrație. Pe un interval pe care derivata e nenulă, funcția e injectivă (în caz contrar, aplicăm Rolle și obținem o contradicție). Din P.D., avem cel puțin o rădăcină a funcției în (a, b) , iar din injectivitate aceasta este unică. ■

Teoremă (Lagrange). Fie o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe (a, b) și continuă în capete

$$\implies \exists c \in (a, b), f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Demonstrație. Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b}x + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

g este derivabilă pe (a, b) și continuă în capete, iar $g(a) = 0 = g(b) \xRightarrow{\text{Rolle}} \exists c \in (a, b), g'(c) = 0 \implies f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$. ■

Observație (consecințele lui Lagrange). Fie o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, derivabilă pe I și $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ interval. Atunci:

$$I) f'(x) = 0, \forall x \in I \iff f(x) = c \in \mathbb{R}, \forall x \in I$$

$$II) f'(x) = g'(x), \forall x \in I \iff f(x) = g(x) + c, c \in \mathbb{R}, \forall x \in I$$

III) $f'(x) \geq 0, \forall x \in I \iff f$ crescătoare pe I

(Dacă $A = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ nu conține niciun interval, atunci f este strict crescătoare pe I)

$$\left. \begin{array}{l} \text{IV) } \exists V_0 \in \mathcal{V}(x_0), g \text{ derivabilă pe } V_0 \setminus \{x_0\} \\ g \text{ continuă în } x_0 \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \end{array} \right\} \implies \exists g'(x_0) = l$$

Teoremă (Darboux). Fie o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, derivabilă pe I . Atunci funcția $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ are prop. Darboux.

Demonstrație. Fie $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda x$, derivabilă.

$$\forall a < b \in I, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f'(a) < \lambda < f'(b) \iff g'(a) < 0 < g'(b)$$

Presupunem prin absurd că g este injectivă pe $[a, b]$, dar are P.D., deci este strict monotonă pe $[a, b]$. Să zicem că este strict cresc.

$$\implies \frac{g(x) - g(a)}{x - a} > 0, \forall x \in (a, b) \implies g'(a) > 0 \text{ (Contradicție)}$$

Dacă era strict descresc., atunci $g'(b) < 0$ (Contradicție).

$$\begin{aligned} \implies g \text{ neinjectivă pe } [a, b] &\implies \exists x_0, x_1 \in [a, b], g(x_0) = g(x_1) \xrightarrow{\text{Rolle}} \exists c \in (x_0, x_1) \subseteq (a, b), g'(c) = 0 \\ \implies f'(c) &= \lambda. \text{ Deci } f' \text{ are P.D.} \end{aligned}$$

■

Teoremă (Cauchy). Fie funcțiile $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile pe (a, b) și continue în capete, iar $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$

$$\implies \exists c \in (a, b), \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}.$$

Demonstrație. Fie $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}g(x) + \frac{g(a)f(b) - g(b)f(a)}{g(a) - g(b)}$$

h este derivabilă pe (a, b) și continuă în capete, iar $h(a) = 0 = h(b) \xrightarrow{\text{Rolle}} \exists c \in (a, b), h'(c) = 0 \implies \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}.$

■

Teoremă (l'Hospital $\frac{0}{0}$). Fie funcțiile $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, I interval $\subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I'$. Dacă:

$$\left. \begin{array}{l} \exists V_0 \in \mathcal{V}(x_0), f, g \text{ derivabile pe } V_0 \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \exists U_0 \in \mathcal{V}(x_0), g'(x) \neq 0, \forall x \in U_0 \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \end{array} \right\} \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Demonstrație. Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, fie $F, G : I \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ și $F(x_0) = 0 = G(x_0)$. Din Cauchy pe $[x, x_0], x \in V_0 \cap U_0 \implies \exists c_x \in (x, x_0)$,

$$\begin{aligned} \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} &= \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F(x)}{G(x)} \xrightarrow{c_x \leq x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{F(x)}{G(x)} \\ \implies \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{F(x)}{G(x)} &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \\ \text{Analog } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{F(x)}{G(x)} &= l \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \end{aligned}$$

Dacă $x_0 = \pm\infty$, aplicăm primul caz funcțiilor $f(\frac{1}{x})$ și $g(\frac{1}{x})$. ■

Teoremă (l'Hospital $\frac{*}{\infty}$). Fie funcțiile $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, I interval $\subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I'$. Dacă:

$$\left. \begin{array}{l} \exists V_0 \in \mathcal{V}(x_0), f, g \text{ derivabile pe } V_0 \setminus \{x_0\} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \\ \exists U_0 \in \mathcal{V}(x_0), g'(x) \neq 0, \forall x \in U_0 \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \end{array} \right\} \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Demonstrație. Fie șirul oarecare $a_n < x_0, a_n \rightarrow x_0$. Aplicăm Cauchy pe $[a_n, a_{n+1}] \implies \exists c_n \in (a_n, a_{n+1}), c_n \rightarrow x_0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{g(a_{n+1}) - g(a_n)} &= \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \xrightarrow{\text{Heine}} l \xrightarrow{\text{Stolz}} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} \rightarrow l \xrightarrow{\text{Heine}} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \\ \text{Analog } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} &= l \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \end{aligned}$$
■

Definiție. Se numește derivata laterală la stânga a funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, într-un punct $x_0 \in D \cap D'$ următoarea limită, dacă există:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{not}}{=} f'_s(x_0)$$

Definiție. Se numește derivata laterală la dreapta a funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, într-un punct $x_0 \in D \cap D'$ următoarea limită, dacă există:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{not}}{=} f'_d(x_0)$$

Observație. Mai avem următoarele puncte remarcabile:

- **punct staționar:** $f'(x_0) = 0$
- **punct de întoarcere:** f continuă în x_0 , $f'_s(x_0) = -f'_d(x_0) = \pm\infty$
- **punct unghiular:** f continuă în x_0 , $f'_s(x_0)$ sau $f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$, $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$
- **punct de inflexiune:** f are derivată și este continuă în x_0 , convexă pe o parte și concavă pe cealaltă

Teoremă (*). Fie funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval $\subseteq \mathbb{R}$, de două ori derivabilă pe I . Dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, atunci funcția este convexă.

Demonstrație.

$$f''(x) \geq 0 \implies f' \text{ este crescătoare}$$

Fie $x_1 < x_2 < x_3 \in I$. Din Lagrange:

$$\exists c \in (x_1, x_2), f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \text{ și } \exists c' \in (x_2, x_3), f'(c') = \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

$$c < c' \implies f'(c) \leq f'(c') \implies \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

$$\forall t \in (0, 1), \exists x_2 \in (x_1, x_3), t = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} \implies (1 - t)(f(x_2) - f(x_3)) \leq t(f(x_1) - f(x_2))$$

$$\implies f(tx_1 + (1 - t)x_3) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_3), \forall t \in (0, 1)$$

Inegalitatea e valabilă și pentru $t \in \{0, 1\} \implies \forall x_1, x_3 \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx_1 + (1 - t)x_3) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_3) \implies$ funcția este convexă. ■

5 Primitive 🔒

6 Integrale definite 🔒